НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
КАФЕДРА ІНФОРМАЦІЙНОЇ БЕЗПЕКИ

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри

____
(підпис)
М. В. Грайворонський
(ініціали, прізвище)
“_____” ______________
2019 р.

Дипломна робота

на здобуття ступеня бакалавра

з напряму підготовки 6.040301 «Прикладна математика»
на тему «Розв’язні узагальнені задачі виконання обмежень на ґратці»
Виконала студент 4 курсу групи ФІ-51
Монастирський Олег Геннадійович ________
(підпис)
Керівник кандидат ф.-м. наук, доцент Южакова Ганна Олексіївна ________
(підпис)
Рецензент ________
(підпис)

Засвідчую, що у цій дипломній роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент _______

Київ — 2019 року

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
Кафедра інформаційної безпеки

Рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)

Напрям підготовки 6.040301 «Прикладна математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ
В.о. завідувача кафедри
__________ М.В.Грайворонський
(підпис)

«___»____________2019 р.

ЗАВДАННЯ
на дипломну роботу студенту

Монастирському Олегу Геннадійовичу

1. Тема роботи: «Розвв'язні узагальнені задачі виконання обмежень на ґратці»

Науковий керівник роботи
Южакова Ганна Олексіївна, кандидат наук, доцент

затверджені наказом по університету від «____ » 2019 р. № _______

2. Термін подання студентом роботи 10 червня 2019 р.

3. Вихідні дані до роботи

____

4. Зміст роботи

5. Перелік ілюстративного матеріалу (із зазначенням плакатів, презентацій тощо)

6. Дата видачі завдання

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання дипломної роботи	Термін виконання етапів дипломної роботи	Примітка

Студент ______________ ________________________
(підпис) (ініціали, прізвище)

Керівник роботи ______________ ________________________
(підпис) (ініціали, прізвище)

РЕФЕРАТ

Дипломна робота містить 29 сторінок, 1 ілюстрацію та 10 джерел літератури.

Одними з розповсюджених проблем комп'ютерних наук є задача виконання обмежень та задача розмітки. Вони лежать в основі деяких алгоритмів комп'ютерного зору та розпізнавання образів. Також ці задачі мають велику теоретичну цінність.

Об'єктом дослідження є узагальнена задача виконання обмежень на ґратці.

Предметом дослідження є алгоритм для розв'язання узагальненої задачі виконання обмежень на ґратці.

Метою даної роботи є розробка і дослідження алгоритму для розв'язання узагальненої задачі виконання обмежень на ґратці.

ЗАДАЧА ВИКОНАННЯ ОБМЕЖЕНЬ, УЗАГАЛЬНЕНА ЗАДАЧА ВИКОНАННЯ ОБМЕЖЕНЬ, ЗАДАЧА розмітки, ҐРАТКА.

ABSTRACT

Graduate work contains 29 pages, 1 illustration and 10 references.

Among the topical issues in computer sciences are constraint satisfaction problem and labeling problem. These problems are basis for some algorithm in computer vision. Also they are of an interest for purely theoretical reasons.

The object of study is a generalized constraint satisfaction problem for a lattice.

The subject of study is an algorithm for solving generalized constraint satisfaction problem for a lattice.

This study aims to to develop and explore the algorithm for solving generalized constraint satisfaction problem for a lattice.

CONSTRAINT SATISFACTION PROBLEM, GENERALIZED CONSTRAINT SATISFACTION PROBLEM, LABELING PROBLEM, LATTICE.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ

Γ – мова обмежень

CSP – задача виконання обмежень

$CSP(\Gamma)$ – задача виконання обмежень на мові обмежень Γ

$SCSP$ – задача виконання обмежень на напівкільці

Δ – мажорантний оператор

$\odot, \oplus$ – оператори на напівкільці

ВСТУП

Актуальність роботи. Задача виконання обмежень та задача розмітки лежать в основі багатьох прикладних алгоритмів. Також ці задачі мають велику теоретичну цінність. В цій роботі ми даємо розв'язок для узагальненої задачі виконання обмежень, спираючись на відомі результати у відповідних областях.

Об'єкт дослідження – узагальнена задача виконання обмежень на ґратці (задача розмітки на ґратці).

Предмет дослідження – алгоритм для розв'язання узагальненої задачі виконання обмежень на ґратці.

Мета дослідження. Розробка та аналіз алгоритму для розв'язання узагальненої задачі виконання обмежень на ґратці.

Завдання наступні:

1) розробити алгоритм для розв'язання узагальненої задачі виконання обмежень на ґратці;
2) дослідити його властивості;
3) розробити програмну реалізацію алгоритму.

Публікації.

XV Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів молодих вчених «Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики».

1 ПОПЕРЕДНІ РОБОТИ ПРИСВЯЧЕНІ ЗАДАЧІ ВИКОНАННЯ ОБМЕЖЕНЬ

В першому розділі розглянуто коротку історію досліджень, пов'язаних із задачею виконання обмежень (constraint satisfaction problem). Розбір попередніх робот дає змогу чітко поставити задачу, що розв'язується в наступних розділах дипломної роботи.

1.1 Перші згадки

Задача виконання обмежень полягає, в широкому сенсі, у відповіді на питання чи можна вибрати елементи об'єкту таким чином, щоб всі зазначені обмеження вдалось виконати. Тому не дивно, що задачі цього типу розглядались у різні епохи. Прикладом може служити задача 8-ми ферзів поставлена 1848 року шахістом Максом Баззелем. В академічних колах перші роботи на цю тему з'явились після Другої світової війни. З 1960-х і надалі задача набула широкого популярності [1].

1.2 Задача виконання обмежень

Нехай D – скінченна множина. Під R_D будемо розуміти множину всіх відношень на D. Дамо формальне визначення задачі виконання обмежень.

Визначення 1.1. Задачею виконання обмежень на мові обмежень $\Gamma \subset R_D$ (позначають $CSP(\Gamma)$), називають трійку $\mathscr{P} = (V,\ D,\ \mathscr{C})$, де

- V – скінченна множина змінних,
- D – скінченна множина значень,
- $\mathscr{C}$ – множина обмежень, що складається з елементів виду (S_i, R_i). S_i – кортежі довжини m_i, який складається з елементів множини V. Його називають межею дії обмеження. $R_i \in \Gamma$ – відношення арності m_i.

Необхідно дати відповідь на питання чи існує функція $\phi : V \to D$ така, що $\phi(S_i) \in R_i$ для всіх i.

Зауважимо, що не всі відношення з Γ мають обов'язково ввійти в обмеження.

Приклад 1.1. Нехай $\mathscr{P} = (V, D, \mathscr{C})$; $V = \{a, b, c\}$, $D = \{0, 1\}$,
$\mathscr{C} = \{(a, b, c), (0, 1, 0)\}$. Питання полягає в тому чи існує функція $\phi : \{a, b, c\} \to \{0, 1\}$ така, що $(a, b, c) = (0, 1, 0)$. Зрозуміло, що це еквівалентно питанню чи можна підібрати значення (a, b, c) так, щоб $\neg a \wedge b \wedge \neg c$ дорівнювало 1.

В загальному випадку ця проблема є NP-повною [2]. Проте відомі випадки, коли її можна розв'язати за поліноміальний час. Загалом, серед відомих прикладів задач виконання обмежень зустрічаються лише NP-повні або ті, які можна розв'язати за поліноміальний час. Федер та Варді висунули гіпотезу, що всі проблеми, які формулюються як задача виконання обмежень або NP-повні, або розв'язуються за поліноміальний час [3]. Цю гіпотезу називають гіпотезою дихотомії.

Виникає питання, яку структура можуть мати обмеження в задачі виконання обмежень, щоб її можна було розв'язати за поліноміальний час. Одним із підходів до цього є питання спроба характеризації алгебраїчної структури множини відношень Γ.

Нехай t – довільний кортеж. Тоді і-ту координату t будемо позначати $t[i]$

Визначення 1.2. Нехай $p : D^k \to D$ – довільне відображення. $t_1, \dots, t_k \in D^n$ – кортежі довжини n. Тоді
$p(t_1, \dots t_k) = (p(t_1[1], \dots, t_k[1]) \dots p(t_1[n] \dots t_k[n]))$ – новий кортеж довжини n.

Визначення 1.3. Нехай $p : D^k \to D$ – довільне відображення. R – відношення арності n. Тоді
$p(R) = \{p(t_1 \dots t_k) \mid t_1 \dots t_k \in R\}$ – нове відношення арності n.

Визначення 1.4. Нехай $p : D^k \to D$ – довільне відображення. R – відношення арності n. Тоді кажуть, що R замкнуте відносно p, якщо $p(R) \subset R$. Інакше кажуть, що p – поліморфізм R.

Приклад 1.2. Розглянемо функцію $\Delta : \{0, 1\}^3 \to \{0, 1\}$:

$$\Delta(x, y, z) = \begin{cases} y, \ y = z \\ x, \ otherwise. \end{cases}$$

Розглянемо відношення $R_1 = \{(0,0,1),\ (0,1,1),\ (0,0,0)\}$.
Тоді $\Delta(R_1) = \{(\Delta(0,0,0),\Delta(0,1,0),\Delta(1,1,0))\} = (0,0,1) \subset R_1$. Отже, R_1 замкнуте відносно Δ.
Інше відношення $R_2 = \{(1,1,1),\ (0,0,1),\ (0,1,0),\ (1,0,0)\}$. Розглянемо дію Δ на останні 3 елементи R_2:
$\Delta((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)) = (0,0,0) \notin R_2$. Отже, R_2 не замкнене відносно Δ.

Якщо кожне відношення $R \in \Gamma$ замкнене відносно деякого відображення p, то кажуть, що Γ замкнене відносно p або інакше p – поліморфізм Γ.

Множину всіх поліморфізмів Γ будемо позначати $\Gamma^{\triangle}$.

Визначення 1.5. Відображення $p : D^k \to D$ називають дійсно унарним (essentially unary), якщо існую i, $1 \le i \le k$, та не константна функція $f : D \to D$, що $p(d_1,\dots,d_k) = f$

Теорема 1.1 ([2])**.** *Якщо для скінченного набору відношень Γ на скінченній множині D $\Gamma^{\triangle}$ містить тільки дійсно унарні операції, то $CSP(\Gamma)$ є NP-повною задачею.*

Визначення 1.6. Відображення $p : D^2 \to D$ називають оператором напівґратки, якщо воно має властивості асоціативності, комутативності та ідемпотентності.

$$p(p(a,b),c) = p(a,p(b,c))$$
$$p(a,b) = p(b,a)$$
$$p(a,a) = a$$

Визначення 1.7. Відображення $p : D^3 \to D$ називають афінним оператором, якщо $p(d_1,d_2,d_3) = d_1 - d_2 + d_3$, де $(D,+,-)$ – Абелева група [4].

Визначення 1.8. Відображення $p : D^3 \to D$ називають функцією більшості, якщо $p(d_1,d_1,d_2) = p(d_1,d_2,d_1) = p(d_2,d_1,d_1) = d_1$.

Теорема 1.2 ([2])**.** *Якщо одна з наступних операцій є поліморфізмом для скінченного набору віднощен Γ на скінченній множині D, тоді $CSP(\Gamma)$ можна розв'язати за поліноміальний час:*

- *оператор напівґратки,*
- *функція більшості,*

- *афінний оператор.*

Як уже було зазначено, серед відомих задач виконання обмежень зустрічаються лише NP-повні та ті, які розв'язуються за поліноміальний час. У випадку, коли $D = \{0,1\}$ відома теорема:

Теорема 1.3 ([5]). *Нехай $\Gamma \subset R_{\{0,1\}}$. Якщо одна з наступних операцій є поліморфізмом для Γ, то, $CSP(\Gamma)$ розв'язується за поліноміальний час:*

- *константний 0 або 1 оператор*
- *оператор напівґратки - диз'юнкція або кон'юнкція,*
- *функція більшості $p(x,y,z) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$,*
- *афінний оператор $p(x,y,z) = x - y + z \ (mod 2)$.*

В інших випадках $CSP(\Gamma)$ є NP-повною.

Також відомо певний клас мов Γ, для яких гіпотеза дихотомії вірна.

Визначення 1.9. Мову Γ називають консервативною, якщо $2^D \subset \Gamma$. Інакше кажучи, всі унарні відношення на D належать Γ.

Для наступної теореми нам знадобиться позначення $p|_B$, яке означає обмеження функції p на множину B.

Теорема 1.4 ([6]). *Задачу $CSP(\Gamma)$ для консервативної мови Γ можна розв'язати за поліноміальний час, коли для кожної двоелементної множини $B \subset D$, існує поліморфізм p^B такий, що $p^B|_B$ є або операцією напівґратки, або оператором більшості, або афінним оператором. В іншому разі задача є NP-повною.*

В роботі [2] описано як пошук множини поліморфізмів Γ можна звести до розв'язання задачі виконання обмежень. Опишемо ці результати.

Визначення 1.10. Нехай Γ – мова обмежень на скінченній множині D. Тоді задачею індифікації для Γ порядку $m \in \mathbb{N}$ називають задачу виконання обмежень $\mathscr{I}\mathscr{P}(\Gamma, m)$ з

- набором змінних $V = D^m$,

- набором значень$D = D$,

- множиною обмежень $\mathscr{C} = \{C_1 ... C_q\}$ такою, що для кожного $R \in \Gamma$ для кожного набору $t_1 ... t_m \in R$ існує обмеження $C_i = (S_i, R)$ таке, що $S_i = (v_1 ... v_n)$, де n – арність R та $v_j = (t_1[j] ... t_m[j])$.

Нескладно переконатись, що розв'язки цієї задачі і є шуканими поліморфізмами для Γ. Дійсно, якщо відношення R замкнене відносно p, то для всіх наборів $t_1 ... t_m \in R$ має виконуватись $p(t_1 ... t_m) \in R$. Саме цій умові має відповідати розв'язок задачі $\mathscr{I}\mathscr{P}(\Gamma, m)$.

Висновки до розділу 1

Зроблено короткий огляд історії пов'язаної із задачею виконання обмежень. Наведено деякі важливі результати в цій області.

2 ПОПЕРЕДНІ РОБОТИ ПРИСВЯЧЕНІ УЗАГАЛЬНЕНІЙ ЗАДАЧІ РОЗМІТКИ

В другому розділі дається короткий огляд результатів, пов'язаних із задачею розмітки (labeling problem).

2.1 Вступ

Неформально, задача розмітки полягає у встановленні відповідності між об'єктами та маркерами. Ця відповідність відшукується таким чином, що або виконуються певні обмеження, або мінімізується певна величина, або знаходиться найбільш імовірна послідовність і т.д.

2.2 Напівкільце

Визначення 2.1. Напівкільцем називають набір $(S, \oplus, \odot, 0, 1)$, де S – множина, $\oplus, \odot$ – бінарні операції, які мають наступні властивості:

$$
\begin{aligned}
&(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \\
&a \oplus b = b \oplus a \\
&0 \oplus a = a \\
&(a \odot b) \odot c = a(b \odot c) \\
&a \odot 1 = 1 \odot a = a \\
&a \odot 0 = 0 \odot a \\
&a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \oplus c) \\
&(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)
\end{aligned}
$$

Напівкільце з ідемпотентністю називають напівкільце, для якого справедливо

$$a \oplus a = a$$

1 називають поглинальним елементом, якщо для всіх $a \in S$:

$$1 \oplus a = 1$$

2.3 Задача розмітки

Визначення 2.2 ([7])**.** Під задачею розмітки (labeling problem) на комутативному напівкільці $(\oplus, \odot, S)$ будемо розуміти набір

$$(T, X, \tau \subset 2^T, f_{T'} : X^{T'} \to S),$$

де

- T – скінченний набір індексів,
- X – скінченний набір значень,
- $f_{T'}$ – набір функцій, для якого необхідно обчислити значення

$$\bigoplus_{\mathbf{x} \in X^T} \bigodot_{T' \in \tau} f_{T'}(\mathbf{x}(T')). \tag{2.1}$$

Ця проблема, в загальному випадку, є NP-складною [8].

В основному, нас цікавить не саме значення (2.1), а значення $\mathbf{x}^*$, таке що

$$\bigodot_{T' \in \tau} f_{T'}(\mathbf{x}^*(T')) = \bigoplus_{\mathbf{x} \in X^T} \bigodot_{T' \in \tau} f_{T'}(\mathbf{x}(T')).$$

Приклад 2.1. Нехай $(\oplus, \odot, S) = (\vee, \wedge, \{0, 1\})$, де $\vee$ – диз'юнкція,
$\wedge$ – кон'юнкція. Нехай T, X, τ –довільні скінченні множини. $f_{T'}$ будемо інтерпретувати так:

$$f_{T'}(x(T')) = \begin{cases} 1, \ x(T') \in R_{T'} \\ 0, \ otherwise. \end{cases}$$

Тут $R_{T'}$ якесь довільне відношення арності $|T|$.

Тоді задача розмітки запишеться наступним чином:

$$\bigvee_{\mathbf{x} \in X^T} \bigwedge_{T' \in \tau} (\mathbf{x}(T') \in R_{T'}).$$

Це еквівалентно питанню чи існує відображення $\mathbf{x} : T \to X$, таке, що всі обмеження $\mathbf{x}(T') \in R_{T'}$ виконані. Таке формулювання являється задачею виконання обмежень, описаною в розділі 1.

Приклад 2.2. Іншим важливим прикладом цієї задачі є випадок $(\oplus, \odot, S) = (max, +, \mathbb{R})$. Таке формулювання часто трапляється в області розпізнавання образів.

2.4 Зв'язок із SCSP

Всі попередні приклади та подальші результати можна представити мовою SCSP - semiring constraint satisfaction problem. Це поняття було введено в роботі [9], і ми наведемо основні визначення з неї.

Визначення 2.3. с-напівкільцем (c-semiring) називають алгебраїчну структуру $(S, +, \times, 0, 1)$ таку, що:

- S – множина, $0, 1 \in S$,
- операція $\sum : 2^S \to S$ введена для кожної (можливо нескінченної) підмножини S так, що:
  - для всіх $s \in S$ $\sum\{s\} = s$
  - $\sum = 0, \sum S = 1$
  - $\sum \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha = \sum\{\sum A_\alpha\}$
- бінарний асоціативний, комутативний оператор $\times$ з одиничним елементом 1 та елементом 0, для якого $0 \times s = 0$ для всіх $s \in S$.
- $\times$ дистрибутивний відносно $\sum$, тобто для всіх $a \in S, B \subset S \quad a \times \sum B = \sum\{a \times b : \ b \in B\}$

Наведене вище визначення є звичним визначенням ідемпотентного напівкільця, якщо не зважати на те, що $\sum$ може братися по нескінченним множинам.

Визначення 2.4. Системою обмежень (constraint system) називають трійку (S, V, D), де S – с-напівкільце, V, D розуміються так само, що і у визначені 1.1.

Визначення 2.5. Обмеженням для системи обмежень (S, V, D) називають пару (con, f), де

- $con \subset V$
- $f : D^k \to S$, де k – арність con.

В цьому визначенні con слід розуміти як межу дії обмеження, а f як узагальнення відношення у визначенні 1.1.

Визначення 2.6. Для системи обмежень (S,V,D) задачею обмеження називають пару $\mathscr{P} = (\mathscr{C}, con)$, де $\mathscr{C}$ – множина обмежень, $con \subset V$.

Тепер необхідно ввести визначення, які дадуть змогу визначити на скільки ”сильно” обмеження можуть бути виконані.

Визначення 2.7. Нехай (S,V,D) – система обмежень. Нехай $W = \{w_1 ... w_k\} W' = \{w'_1 ... w'_m\}$ дві впорядковані множини, що $W' \subset W \subset V$. Нехай $t = (t_1 ... t_k)$ – кортеж довжини k, тоді проекцією t з W на W', називають кортеж довжини m $t' = t \downarrow^{W}_{W'} = (t'_1 ... t'_m)$ такий, що $t'_i = t_j$, якщо $w'_i = w_j$

Визначення 2.8. Нехай (S,V,D) – система обмежень. $c_1 = (con_1, f_1)$ та $c_2 = (con_2, f_2)$ – обмеження. Тоді об’єднанням цих обмежень є нове обмеження $c = c_1 \otimes c_2$ таке, що

$$
\begin{aligned}
con &= con_1 \cup con_2, \\
f(t) &= f_1(t \downarrow^{con}_{con_1}) \times f_2(t \downarrow^{con}_{con_2})
\end{aligned}
$$

Оскільки $\times$ асоціативна операція, то запис $\bigotimes C$, де C – якась множина обмежень, розуміється цілком однозначно.

Визначення 2.9. Нехай (S,V,D) – система обмежень. $c = (con, f)$ – обмеження. Тоді проекцію на множину змінних $I \subset V$ називають нове обмеження $c' = c \Downarrow_I$ таке, що та

$$
\begin{aligned}
con' &= con \cap I, \\
f'(t) &= \sum_{\{t' :\, t' \downarrow^{con}_{con \cap I} \,=\, t\}} f(t')
\end{aligned}
$$

Тепер можна сформулювати, що необхідно знайти в задачі виконання обмежень на напівкільці.

Визначення 2.10. Нехай $\mathscr{P} = (\mathscr{C}, con)$ задача обмежень над системою обмежень (S,V,D). Тоді розв'язком цієї задачі називають

$$Sol(\mathscr{P}) = (\bigotimes \mathscr{C}) \Downarrow_{con} .$$

Цей запис можна розуміти як обмеження, накладені всією системою на змінні con. Проте інколи нам достатньо знати лише "найкраще"значення асоційоване з нашою задачею.

Визначення 2.11. Нехай $\mathscr{P} = (\mathscr{C}, con)$ задача обмежень над системою обмежень (S,V,D). Тоді найкращим рівнем виконанням обмежень (best level of consistency називається

$$blevel(\mathscr{P}) = (\bigotimes \mathscr{C}) \Downarrow .$$

Розпишемо чому дорівнює значення $f(t)$ для $blevel(\mathscr{P})$. Зауважимо, що проекція виконується на пусту множину, тому $f(t) = f() = f$. Спочатку розпишемо чому дорівнює $f'(t)$ для $(\bigotimes \mathscr{C})$

$$f'(t) = \prod_{con \in \mathscr{C}} f(t \downarrow^{bigcon}_{con}),$$

де $bigcon = \bigcup\limits_{con \in \mathscr{C}} con$. Тоді

$$f = \sum_{\{t:\, t\downarrow^{bigcon} = \}} f'(t) = \sum_{t \in D^n} \prod_{con \in \mathscr{C}} f(t \downarrow^{bigcon}_{con}),$$

де D^n – кортежі арності $|bigcon|$.

Цей запис є тією величиною, яку ми намагаємося відшукати в задачі розмітки. Отже, задача розмітки на ідемпотентному напівкільці є одним із питань, які можна ставити для задачі виконання обмежень на напівкільці. В подальшій частині роботи буде використовуватись формалістика задачі розмітки, оскільки ми не будемо посилатися на теорію розвинену для задачі виконання обмежень на напівкільці, а запис задачі виконання обмежень є простішим.

2.5 Поліморфізм

В прикладі 2.1 показано зв'язок між узагальненою задачею розмітки та задачею виконання обмежень. Можна переформулювати поняття поліморфізму введене в секції 1 мовою загальної задачі розмітки.

Визначення 2.12. Функцію $p : X^m \to X$ називають поліморфізмом функції $f : X^k \to \{0,1\}$ (або f інваріантна відносно p), якщо виконується

$$\bigwedge_{i \in \overline{1,m}} f(\mathbf{x}_i) \to f(p(x_1^1 ... x_m^1) ... p(x_1^k ... x_m^k)),$$

де x_j^i – i-та координата $\mathbf{x}_j$. Далі $p(x_1^1 ... x_m^1) ... p(x_1^k ... x_m^k)$ будемо позначати $p(\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_m)$

Щоб переконатися в тому, що визначення дане в секції 1 та нове визначення еквівалентні, знову звернемось до прикладу 2.1. Функція

$$f_{T'}(x(T')) = \begin{cases} 1, \ x(T') \in R_{T'} \\ 0, \ otherwise. \end{cases}$$

Інваріантна відносно поліморфізму p, якщо з того, що $\mathbf{x}_1(T') ... \mathbf{x}_m \in R_{T'}$ випливає, що $p(\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_m) \in R_{T'}$, тобто $R_{T'}$ замкнена відносно p.

Це визначення дає змогу переформулювати поняття поліморфізму на довільне напівкільце.

Визначення 2.13. Функцію $p : X^m \to X$ називають поліморфізмом функції $f : X^k \to S$ (або f інваріантна відносно p), якщо виконується

$$\bigodot_{i \in \overline{1,m}} f(\mathbf{x}_i) \oplus f(p(\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_m)) = f(p(\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_m)).$$

В тому, що це визначення зводиться до визначення 2.12 на $(\oplus, \odot S) = (\vee, \wedge, \{0,1\})$ не складно переконатись підставивши відповідні операції у визначення 2.13.

В роботі [10] було доведено, що якщо існує поліморфізм для загальної задачі розмітки на напівкільці з ідемпотентністю на обох операціях та цей поліморфізм є операцією більшості, то задачу можна розв'язати за поліноміальний час.

Висновки до розділу 2

Було проведено короткий огляд історії, пов'язаної із узагальненою задачею розмітки та наведено визначення, які знадобляться в наступних розділах.

3 ЗАДАЧА РОЗМІТКИ НА ҐРАТЦІ

В цій секції буде розглянуто зв'язок між задачею розмітки на ґратці та задачею виконання обмежень. Наводиться алгоритм для розв'язку задачі розмітки на ґратці при наявності поліморфізму.

3.1 Ґратка

Визначення 3.1. Ґратка - це алгебраїчна структура з бінарними операціями $\wedge$ та $\vee$, які задовольняють тотожностям

$$
\begin{aligned}
&a \wedge a = a; && a \vee a = a;\\
&a \wedge b = b \wedge a; && a \vee b = b \vee a;\\
&(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c); && (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c);\\
&(a \wedge b) \vee b = b; && (a \vee b) \wedge b = b;
\end{aligned}
$$

Приклад 3.1. Найпростішим прикладом ґратки є множина $\{0,1\}$ з операціями диз'юнкції та кон'юнкції на ній.

Приклад 3.2. X – довільна множина, 2^X – множина підмножин X. Тоді $(\cap, \cup, 2^X)$ формують ґратку.

На ґратці можна ввести частковий порядок наступним чином:

$$a \geq b \Leftrightarrow a \vee b = a$$

Доведемо, що введене відношення $\geq$ дійсно утворює частковий порядок, тобто є рефлексивним, антисиметричним та транзитивним.

- Рефлексивність: $a \vee a = a \Rightarrow a \geq a$.
- Антисиметричність: нехай $a \geq b, b \geq a$, тоді $b = b \vee a = a \vee b = a$.
- Транзитивність: нехай $a \geq b, b \geq c$, тоді $a \vee c = a \vee b \vee c = a \vee b = a$, тобто $a \geq c$.

Зауваження 3.1. В доведенні ми використовували ті властивості операції $\vee$, які має операція $\oplus$ для ідемпотентного напівкільця.

Доведемо деякі властивості ґратки, які знадобляться нам в подальшому.

Лема 3.1. *$a \vee b = a$ тоді і тільки тоді, коли, $a \wedge b = b$.*

Доведення. $a \vee b = a$, тоді $(a \vee b) \wedge b = a \wedge b$. Із властивості ґратки ліва частина дорівнює b. Тобто $a \wedge b = b$. В іншу сторону аналогічно. □

Лема 3.2. *$a \geq c$, $b \geq c$ тоді $a \wedge b \geq c$.*

Доведення. $a \wedge b \wedge c = a \wedge c = c$, отже $a \wedge b \geq c$ з леми 3.1. □

Лема 3.3. *$c \geq a$, $c \geq b$ тоді $c \geq a \vee b$.*

Доведення. $a \vee b \vee c = a \vee c = c$, тобто $c \geq a \vee b$. □

Лема 3.4. $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

Доведення. $(a \wedge b) \vee a = a$, тобто $a \geq a \wedge b$. Аналогічно $a \geq a \wedge c$. З тої ж причини $c \geq a \wedge c$ і $b \vee c \geq c$. Тобто $b \vee c \geq a \wedge c$. Таким же чином $b \vee c \geq a \wedge b$. З леми (3.2) $a \wedge (b \vee c) \geq a \wedge b, a \wedge c$. З леми (3.3) отримаємо $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ □

Лема 3.5. $(a \vee b) \wedge (c \vee d) \geq (a \wedge c) \vee (a \wedge d) \vee (b \wedge c) \vee (b \wedge c)$

Доведення. З леми 3.4 $(a \vee b) \wedge (c \vee d) \geq ((a \vee b) \ \wedge c) \vee ((a \vee b) \wedge d)$. Використавши, лему 3.5 іще раз, отримаємо

$$(a \vee b) \wedge (c \vee d) \geq (a \wedge c) \vee (a \wedge d) \vee (b \wedge c) \vee (b \wedge c).$$

□

3.2 Характеризація поліморфізмів на ґратці

Оскільки задача виконання обмежень є задачею розмітки на ґратці $(\vee, \wedge, \{0, 1\})$, доцільним видається пошук зв'язку між задачею розмітки на довільній ґратці та задачею виконання обмежень.

Означення поліморфізму 2.12 можна висловити інакше: якщо всі $f(\mathbf{x}_i) \vee 1 = f(\mathbf{x}_i)$, то $f(p(\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_m)) \vee 1 = f(p(\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_m))$. Виявляється, що подібне твердження справедливе для довільної ґратки.

Далі в цій секції $(\oplus, \odot, S)$ позначає ґратку.

Лема 3.6. *Нехай $p : X^m \to X$ поліморфізм для $f : X^k \to S$. Нехай для деякого $a \in S \quad f(\mathbf{x}_i) \oplus a = f(\mathbf{x}_i)$ для всіх $i \in \overline{1,m}$. Тоді $f(p(\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_m)) \oplus a = f(p(\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_m))$.*

Доведення. З умови леми:

$$f(p(\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_m)) = \bigodot_{i \in \overline{1,m}} f(\mathbf{x}_i) \oplus f(p(\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_m)) =$$

$$= \bigodot_{i \in \overline{1,m}} (f(\mathbf{x}_i) \oplus a) \oplus f(p(\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_m)).$$

Скориставши нерівністю з леми 3.5, отримаємо:

$$\bigodot_{i \in \overline{1,m}} (f(\mathbf{x}_i) \oplus a) \oplus f(p(\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_m)) \geq$$
$$\geq \bigodot_{i \in \overline{1,m}} f(\mathbf{x}_i) \oplus a \odot (...) \oplus a \oplus f(p(\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_m)).$$

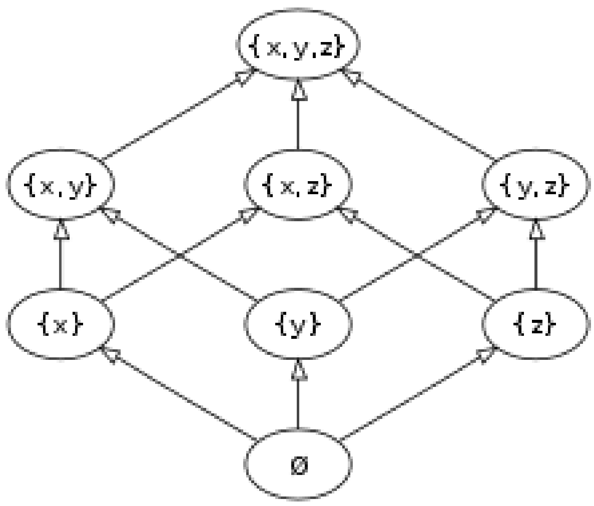

Рисунок 3.1 – Приклад ґратки на $(\cap, \cup, 2^{\{x,y,z\}})$

В $(...)$ стоять суми добутків $f(\mathbf{x}_i)$. Скориставшись властивістю поглинання для ґратки, отримаємо:

$$\bigodot_{i\in\overline{1,m}} f(\mathbf{x}_i) \oplus f(p(\mathbf{x}_1...\mathbf{x}_m)) \oplus a = f(p(\mathbf{x}_1...\mathbf{x}_m)) \oplus a.$$

Таким чином

$$f(p(\mathbf{x}_1...\mathbf{x}_m)) \geq f(p(\mathbf{x}_1...\mathbf{x}_m)) \oplus a.$$

Оскільки зворотній знак нерівності також справедливий отримуємо

$$f(p(\mathbf{x}_1...\mathbf{x}_m)) = f(p(\mathbf{x}_1...\mathbf{x}_m)) \oplus a.$$

□

Оскільки властивість $f(\mathbf{x}) \oplus a = f(\mathbf{x})$ зберігається відносно поліморфізму, доцільно розглянути функцію $g^a : S \to \{0,1\}, a \in S$ вигляду

$$g^a(x) = \begin{cases} 1, x \oplus a = x, \\ 0, otherwise. \end{cases} \tag{3.1}$$

В лемі 3.6 було доведено, що якщо для функції $f_{T'}$ існує певний поліморфізм p, то він буде поліморфізмом і для функцій $h^a_{T'} = g^a \circ f_{T'}$ для всіх $a \in S$. Покажемо, що зворотне твердження також є вірним.

Лема 3.7. *Нехай $f : X^k \to S$, $h^a = g^a \circ f$, де g^a введено рівнянням 3.1. Нехай $p : X^m \to X$ поліморфізм для $h^a : X^k \to \{0,1\}$ для всіх $a \in S$. Тоді p буде поліморфізмом для f.*

Доведення. За умовою леми маємо,

$$\text{якщо} \bigwedge_{i\in\overline{1,m}} h^a(\mathbf{x}_i) = 1, \text{ то } h^a(p(\mathbf{x}_1...\mathbf{x}_m)) = 1.$$

Візьмемо $a = \bigodot_{i\in\overline{1,m}} f(\mathbf{x}_i)$. Тоді для всіх $i \in \overline{1,m}$

$$f(\mathbf{x}_i) \oplus \bigodot_{i\in\overline{1,m}} f(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i).$$

Таким чином, для $a = \bigodot_{i\in\overline{1,m}} f(\mathbf{x}_i)$ має бути виконане
$h^a(p(\mathbf{x}_1...\mathbf{x}_m)) = 1$. Тобто

$$f(p(\mathbf{x}_1...\mathbf{x}_m)) \oplus \bigodot_{i\in\overline{1,m}} f(\mathbf{x}_i) = f(p(\mathbf{x}_1...\mathbf{x}_m)).$$

Що і треба було довести. □

Теорема 3.1. *Нехай $f : X^k \to S$, $h^a = g^a \circ f$, де g^a введено рівнянням 3.1. Тоді функція $p : X^m \to X$ буде поліморфізмом для f тоді і тільки тоді, коли p буде поліморфізмом для $h^a : X^k \to \{0,1\}$ для всіх $a \in S$.*

Доведення. З попередніх лем. □

В 1-ій секції було описано як знаходження множини поліморфізмів Γ можна звести до задачі виконання обмежень. Попередня теорема показує як знаходження множини поліморфізмів на ґратці можна звести до розв'язання задачі виконання обмежень. Дійсно, з доведення леми 3.7 видно, що необхідно перевірити лише ті функції $h^a = g^a \circ f$ на наявність поліморфізму $p : X^m \to X$, що a буде добутком m можливих значень функцій f. Таким чином, для знаходження поліморфізмів в задачі розмітки на ґратці можна розв'язати певну кількість (поліноміальну від кількості значень функцій $f_{T'}$) відповідних задач індифікації для функцій $h^a_{T'}$ або розв'язати одну задачу індифікації для функцій $h^a_{T'}$ для фіксованого a і перевірити всі знайдені поліморфізми на те, чи вони є поліморфізмами і для $f_{T'}$.

3.3 Основний результат

В попередній секції було введено функції g^a. Доведемо кілька простих властивостей цих функцій.

Лема 3.8. *Нехай $g^a : S \to \{0,1\}$ функція, введена формулою (3.1). Тоді $g^a(x \odot y) = g^a(x) \wedge g^a(y)$.*

Доведення. Якщо $g^a(x) = g^a(y) = 1$, то із леми (3.2) для ґратки маємо

$$g^a(x \odot y) = 1.$$

Якщо $g^a(x) = 0$, то нехай $(x \odot y) \oplus a = x \odot y$. Тоді

$$
\begin{aligned}
&(x \odot y) \oplus a \oplus x = (x \odot y) \oplus x, \\
&x \oplus a = x.
\end{aligned}
$$

Отримали суперечність. Отже,

$$g^a(x \odot y) = g^a(x) \wedge g^a(y).$$

$\square$

Лема 3.9. *Нехай* $g^a(x) \vee g^a(y) = 1$. *Тоді* $g^a(x \oplus y) = 1$.

Доведення. Нехай $x \oplus a = x$. Тоді

$$x \oplus y \oplus a = x \oplus y, \tag{3.2}$$

звідки $g^a(x \oplus y) = 1$. $\square$

Тепер доведемо основну теорему, що дозволить побудувати алгоритм для розв'язку задачі розмітки на скінченній ґратці.

Теорема 3.2. *Нехай* $h^a_{T'} = g^a \circ f_{T'}$. *Тоді*

$$\bigoplus_{\mathbf{x} \in X^T} \bigodot_{T' \in \tau} f_{T'}(\mathbf{x}(T')) = \bigoplus_{\{a \in S:\ \bigvee\limits_{\mathbf{x} \in X^T} \bigwedge\limits_{T' \in \tau} h^a_{T'}(\mathbf{x}(T'))=1\}} a$$

Доведення. Дійсно, якщо $\bigodot\limits_{T' \in \tau} f_{T'}(\mathbf{x}(T')) = a$ для якогось $\mathbf{x}$, то

$$\bigvee_{\mathbf{x} \in X^T} \bigwedge_{T' \in \tau} h^a_{T'}(\mathbf{x}(T')) = \bigvee_{\mathbf{x} \in X^T} g^a\Big(\bigodot_{T' \in \tau} f_{T'}(\mathbf{x}(T'))\Big) = 1.$$

При цьому нехай для деякого a для будь-якого $\mathbf{x}$ маємо

$$\bigodot_{T' \in \tau} f_{T'}(\mathbf{x}(T'))) \oplus a \neq \bigodot_{T' \in \tau} f_{T'}(\mathbf{x}(T'))).$$

Тоді $\bigvee\limits_{\mathbf{x} \in X^T} \bigwedge\limits_{T' \in \tau} h^a_{T'}(\mathbf{x}(T')) = 0$. Таким чином, в суму

$$\bigoplus_{\{a \in S:\ \bigvee\limits_{\mathbf{x} \in X^T} \bigwedge\limits_{T' \in \tau} h^a_{T'}(\mathbf{x}(T'))=1\}} a$$

будуть входити ті і тільки ті a, для яких існує $\mathbf{x}$ такий, що

$$\bigodot_{T'\in\tau} f_{T'}(\mathbf{x}(T'))) \oplus a = \bigodot_{T'\in\tau} f_{T'}(\mathbf{x}(T'))).$$

Отже,

$$\bigoplus_{\mathbf{x}\in X^T} \bigodot_{T'\in\tau} f_{T'}(\mathbf{x}(T')) = \bigoplus_{\{a\in S:\ \bigvee\limits_{\mathbf{x}\in X^T} \bigwedge\limits_{T'\in\tau} h^a_{T'}(\mathbf{x}(T'))=1\}} a.$$

□

Наслідок 3.2.1. *Якщо існує поліморфізм $p : X^m \to X$ для функцій $f_{T'} : X^k \to S$, то він буде поліморфізмом і для функцій $h^a_{T'}$ (з леми 3.6). Таким чином, якщо відомо, що для для функцій, інваріантних відносно p, задачу виконання обмежень можна розв'язати за поліноміальний час, то $\bigoplus\limits_{\mathbf{x}\in X^T} \bigodot\limits_{T'\in\tau} f_{T'}(\mathbf{x}(T'))$ також можна обчислити за поліноміальний час, якщо S – скінченна ґратка.*

3.4 Приклад

Розглянемо ґратку $(gcd, lcm, \{1,2,3,6\})$, де gcd – найбільший спільний дільник, lcm – найменше спільне кратне. Нехай

$$T = \{t_1,t_2\}, X = \{0,1\}, \tau = \{\{t_1\},\{t_1,t_2\}\}$$

Нехай

$$f_{t_1}(0) = 1,\ t_{t_1}(1) = 2$$
$$f_{t_1t_2}(0,0) = 1,\ f_{t_1t_2}(0,1) = 2$$
$$f_{t_1t_2}(1,0) = 3,\ f_{t_1t_2}(1,1) = 6$$

Не складно переконатись у тому, що оператор max буде поліморфізмом для наших функцій. Дійсно

$$gcd(lcm(f_{t_1}(x), f_{t_1}(y)), f_{t_1}(max(x,y))) = f_{t_1}(max(x,y)),$$

оскільки, якщо серед x та y є 0, то $lcm(...) = 1$, а якщо серед x та y є 1, то $max(x,y) = 1$, тобто $f_{t_1}(max(x,y)) = 2$. Для $f_{t_1t_2}$ маємо

$$gcd(lcm(f_{t_1t_2}(x_1,x_2), f_{t_1t_2}(y_1,y_2)), f_{t_1t_2}(max(x_1,y_1), max(x_2,y_2))) =$$
$$= f_{t_1t_2}(max(x_1,y_1), max(x_2,y_2)).$$

Для випадку, коли серед $(x_1,x_2),(y_1,y_2)$ є $(0,0)$ або $(1,1)$ аргументація та ж, що і в попередньому випадку. У випадку, коли $(x_1,x_2) = (y_1,y_2)$, то у виразі всі значення $f_{t_1t_2}$ однакові. Коли один з (x_1,x_2) та (y_1,y_2) буде $(0,1)$ інший $(1,0)$, матимемо $(max(x_1,y_1), max(x_2,y_2)) = (1,1)$, тобто $f_{t_1t_2}(max(x_1,y_1), max(x_2,y_2)) = 6$.

Оператор max є оператором напівґратки. Для такого поліморфізму алгоритм для розв'язку задачі виконання обмежень описаний в роботі [2]. Він полягає у розгляді обмежень на кожну змінну не зважаючи на всі інші.

Для розв'язку за алгоритмом, запропонованим в попередній секції, необхідно знайти $h^a_{t_1}$ та $h^a_{t_1t_2}$ для всіх a. В нашому випадку достатньо розглянути лише $a = 2,3$. Запишемо відповідну задачу виконання обмежень для $a = 2$. Обмеження матимуть вигляд

$$\{t_1 : \{1\};\ t_1t_2 : \{(0,1),(1,1)\}\}.$$

Тобто перше обмеження полягає в тому, що $x(t_1) = 1$, друге, що $x(t_1,t_2) = (0,1)$ або $(1,1)$. Розглядаючи обмеження на кожну змінну окремо маємо, з першого обмеження $t_1 \in \{1\}$ та з другого $t_1 \in \{0,1\}$, отже оскільки $\{0,1\} \cap \{1\} \neq \emptyset$ обмеження на t_1 може бути виконані. Для t_2 з другого обмеження $t_2 \in \{1\}$. Отже всі обмеження можуть бути виконанні.

Для $a = 3$

$$\{t_1 : \emptyset;\ t_1t_2 : \{(1,0),(1,1)\}\}.$$

Отже обмеження не можуть бути виконані. Тобто відповідь буде 2.

Висновки до розділу 3

Задача розмітки на ґратці може бути зведена до задачі виконання обмежень. У випадку, коли для функцій задачі розмітки існує поліморфізм, який дозволяє розв'язувати задачу виконання обмежень за поліноміальний час, задачу розмітки на скінченній ґратці також вдається розв'язати за поліноміальний час.

ВИСНОВКИ

В результаті виконання роботи було досліджено узагальнену задачу виконання обмежень на ґратці. Було отримано результати, які зводять розв'язок узагальненої задачі виконання обмежень на ґратці до скінченного кількості розв'язків задачі виконання обмежень. У випадку, коли для функцій задачі розмітки існує поліморфізм, який дозволяє розв'язувати задачу виконання обмежень за поліноміальний час, задачу розмітки на скінченній ґратці також вдається розв'язати за поліноміальний час.

Було показано як знаходження поліморфізмів для узагальненої задачі виконання обмежень можна звести до знаходження поліморфізмів для задачі виконання обмежень.

Недолік отриманих результатів полягає в тому, що практично їх можна застосувати тільки у випадку, коли ґратка має скінченний розмір. Навіть у випадку великої, проте скінченної, кількості елементів ґратки алгоритм може виявитися складним для обчислення.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАНЬ

1. Rossi F., Van Beek P., Walsh T. Handbook of constraint programming. — Elsevier, 2006.

2. Jeavons P., Cohen D., Gyssens M. Closure properties of constraints // Journal of the ACM (JACM). — 1997. — Vol. 44, no. 4. — P. 527–548.

3. Feder T., Vardi M. Y. The computational structure of monotone monadic snp and constraint satisfaction: A study through datalog and group theory // SIAM Journal on Computing. — 1998. — Vol. 28, no. 1. — P. 57–104.

4. Dummit D. S., Foote R. M. Abstract algebra. — Wiley Hoboken, 2004. — Vol. 3.

5. Jeavons P. On the algebraic structure of combinatorial problems // Theoretical Computer Science. — 1998. — Vol. 200, no. 1-2. — P. 185–204.

6. Bulatov A. A. Tractable conservative constraint satisfaction problems // 18th Annual IEEE Symposium of Logic in Computer Science, 2003. Proceedings. / IEEE. — 2003. — P. 321–330.

7. Schlesinger M. I., Flach B. Some solvable subclasses of structural recognition problems // Czech Pattern Recognition Workshop. — Vol. 2000. — 2000. — P. 55–62.

8. Werner T. A linear programming approach to max-sum problem: A review // Research Reports of CMP. 2005, No. 25. — 2005.

9. Bistarelli S., Montanari U., Rossi F. Semiring-based constraint satisfaction and optimization // Journal of the ACM (JACM). — 1997. — Vol. 44, no. 2. — P. 201–236.

10. Evgeniy V. Generalized Labeling Problems with a Majority Polymorphism for a Certain Class of Semirings : Thesis for a conference / Vodolazskiy Evgeniy ; Department of Image Processing and Recognition IRTC ITS.